Matrice, pojam i osobine

Matrica je pravougaona tabela (šema) čiji su elementi brojevi poređani u vrste i kolone.

Opšti oblik matrice je:

$$A = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\text{row}} \\ \text{column}\downarrow & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & . & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & . & a_{3,m} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & . & a_{n,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

Svaki element matrice može da se zapiše u obliku $a_{n,m}$, gde n predstavlja broj vrste a m broj kolone matrice.

Primer 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

A je matrica koja ima 2 vrste i 3 kolone u kojoj je broj '2' element prve vrste i treće kolone.

Primer 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

B je matrica koja ima 3 vrste i 2 kolone u kojoj je broj '8' element druge vrste i druge kolone.

Matrica koja ima jednak broj vrsta i kolona zove se **kvadratna matrica**.

Primer 3 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

C je matrica sa tri vrste i 3 kolone.

Tip ili **format** matrice pokazuje koliko matrica ima elemenata i na koji način su ti elementi poredani. Matrica A u primjeru 1 je tipa 2x3, matrica B je tipa 3x2 a matrica C je tipa 3x3.

Matrica čiji su **svi elementi jednaki nuli** naziva se ***nula- matrica.*** $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, itd$

Matrica $-A$ definisana sa $-A \overset{def}{=} (-1)A$ je ***suprotna matrica*** za matricu A.

D je opšti oblik kvadratne matrice.

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & . & a_{3,n} \\ . & a_{n-1,2} & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & . & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Elementi na glavnoj dijagonali matrice predstavljeni su crvenom bojom, dok su elementi sporedne dijagonale predstavljeni plavom bojom.

Matrica na čijoj se glavnoj dijagonali nalaze jedinice, a svi ostali elementi su jednaki nuli zove se jedinična matrica.

Primer 4

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer 5

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trag kvadratne matrice je zbir njenih elemenata na glavnoj dijagonali i obilježava se sa $tr(D) = a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$

Kvadratna matrica kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0, naziva se **dijagonalna** matrica. Dijagonalna matrica kojoj su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki naziva se **skalarna** matrica.

Ako su elementi kvadratne matrice simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ matrica je **simetrična**. Ako važi $a_{ij} = - a_{ji}$ za sva (i,j) matrica je **asimetrična**.U tom slučaju na glavnoj dijagonali moraju biti 0.

Ako su svi elementi kvadratne matrice reda n **ispod glavne dijagonale jednaki nuli**, takva se matrica naziva ***gornja trougaona matrica.***

Na primer : $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ je gornja trougaona matrica reda 3.

Ako su svi elementi kvadratne matrice reda n **iznad glavne dijagonale jednaki nuli**, takva se matrica naziva ***donja trougaona matrica.***

Na primer : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ je donja trougaona matrica reda 3.

Dve matrice A i B su **jednake** ako i samo ako su **istog tipa** i imaju **jednake odgovarajuće elemente**.

Transponovana matrica je dobijena od polazne matrice zamenom vrsta sa odgovarajućim kolonama. Za datu matricu A, njena transponovana matrica obeležava se sa A^T.

Primer 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Za simetričnu matricu važi $A^T = A$, a za antisimetričnu $A^T = -A$.

PRIMJERI

1. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ x & -3 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 0 & -x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.7 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Odredite a_{21}, a_{12}, a_{42}, b_{13}, b_{31}.

2. Napišite matricu $A \in M_{23}$ ako je $a_{ij} = i^2 - j^2$.

3. Napišite matricu $X \in M_4$ ako je

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad i < j \\ -1 & \text{za} \quad i > j \\ 0 & \text{za} \quad i = j \end{cases}.$$

4. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & x/y \\ x & y^2 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ x & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & 2 \\ x & 3x \end{bmatrix}.$$

Odredite parametre x i y tako da je:
(a) $A = B$, (b) $B = C$.

5. Zadana je matrica

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & x \\ x^2 & 0 & x^3 \\ x & -8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Za koju vrijednost parametra x je matrica T simetrična?

6. Odredite trag matrice T iz primjera 5.